Вопросы к экзамену

Алгебра 1 семестр

2024-25 уч. год

1. Основные алгебраические структуры: группы, кольца, поля (определение). Композиция отображений, ассоциативность композиции. Инъективные и сюръективные отображения. Биективные отображения. Обратное отображение.

2. Комплексные числа. Сложение и умножение комплексных чисел. Алгебраическая запись комплексного числа. Поле комплексных чисел. Сопряжение комплексных чисел.

3. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.

4. Корни n-ой степени из комплексного числа. Корни из единицы. Группа корней n-ой степени из 1. Первообразные корни n-ой степени из 1.

5. Перестановки. Число перестановок n элементов. Инверсия. Четность. Транспозиция и четность. Список перестановок, в котором каждая последующая получается одной транспозицией предыдущей.

6. Группа подстановок n-й степени. Четность подстановки. Транспозиции. Разложение подстановки в произведение транспозиций и четность перестановки.

7. Циклы. Четность цикла. Разложение подстановки в произведение независимых циклов. Декремент подстановки и четность.

8. Определение определителя n-го порядка. Основные свойства определителя. Элементарные преобразования.

9. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке (столбцу). Теорема Лапласа.

10. Правило Крамера.

11. Алгебра матриц. Свойства операций сложения и умножения матриц (ассоциативность умножения без док-ва).

12. Теорема об умножении определителей.

13. Обратная матрица.

14. Системы линейных алгебраических уравнений. Эквивалентные системы лин. алгебраических уравнений. Элементарные преобразования. Метод Гаусса.

15. Векторное пространство над полем, примеры. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Линейная оболочка системы векторов. Лемма о линейной зависимости.

16. Подпространство. Базис подпространства. Размерность. Базис системы векторов. Ранг системы векторов.

17. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Метод окаймляющих миноров. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя n-го порядка.

18. Критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений (теорема Кронекера-Капелли).

19. Связь между решениями однородной и неоднородной систем линейных алгебраических уравнений. Однородные системы. Фундаментальная система решений.

20. Многочлены с коэффициентами из кольца. Кольцо многочленов. Степень многочлена. Кольцо многочленов над полем: степень произведения многочленов, отсутствие делителей нуля. Деление с остатком в кольце многочленов над полем.

21. Свойства делимости в кольце. Наибольший общий делитель многочленов. Алгоритм Евклида. Выражение наибольшего общего делителя многочленов f и g через f и g.

22. Взаимно простые многочлены. Свойства взаимно простых многочленов.

23. Корни многочлена. Теорема Безу. Кратность корня. Критерий кратности корня. Количество корней многочлена с учетом кратностей.

24. Многочлены с комплексными коэффициентами: основная теорема алгебры комплексных чисел (без док-ва), разложение многочлена на линейные множители, формулы Виета, интерполяционный многочлен Лагранжа.